МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ИНФОРМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Допускаю к защите

Заведующий кафедрой ФИиПМ

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/ Котельников Е.В.

(подпись) (Ф.И.О.)

ВЫРАЖЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП КОКСТЕРА ЧЕРЕЗ YJM-ЭЛЕМЕНТЫ

Пояснительная записка выпускной квалификационной работы

Разработал студент гр. ПМИм-2301-01-00 \_\_\_\_\_\_/ Стерлягов А.А. / \_\_\_\_\_\_

Руководитель к.ф.-м.н., доцент каф. ФИиПМ\_\_\_\_\_\_/ Пушкарев И.А. / \_\_\_\_\_\_

Киров 2017

Содержание

[Введение 3](#_Toc484371706)

[1 Обзор научной литературы, связанной с проблематикой работы 4](#_Toc484371707)

[1.1 Теория представлений симметрических групп 4](#_Toc484371708)

[1.2 YJM-элементы 4](#_Toc484371709)

[1.3 Симметрические многочлены от 7](#_Toc484371710)

[2 Актуальность темы выпускной квалификационной работы. Постановка задачи 8](#_Toc484371711)

[3 Разработка программного обеспечения 9](#_Toc484371712)

[3.1 Обоснование выбора средств реализации 9](#_Toc484371713)

[3.2 Реализация основных функций 9](#_Toc484371714)

[3.3 Анализ полученных результатов 9](#_Toc484371715)

[Заключение 10](#_Toc484371716)

[Приложение А (справочное). Схемы алгоритмов основных функций 11](#_Toc484371717)

[Приложение Б (справочное). Часть листинга программы 12](#_Toc484371718)

[Приложение В (обязательное). Графическая часть 13](#_Toc484371719)

[Приложение Г (обязательное). Авторская справка 14](#_Toc484371720)

[Приложение Д (обязательное). Библиографический список 15](#_Toc484371721)

Введение

1 Обзор научной литературы, связанной с проблематикой работы

1.1 Теория представлений симметрических групп

Теория представлений симметрических групп является, по-видимому, одним из старейших «конкретных» приложений аппарата общей теории представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Она восходит к работам А. Юнга (см. напр. [1]) и характерна большой сложностью рассматриваемых конструкций. Например, Г. Джеймс, автор прекрасного изложения этой теории [2], пишет, что работы Юнга очень трудночитаемы. Показательно, что некоторые фрагменты самой книги [2] крайне трудны даже для подготовленного читателя. Сложность рассматриваемых конструкций была серьёзным препятствием к разработке самой теории и, главное, её «небольших» обобщений на серии групп, близких к симметрическим (которые являются, по совместительству, группами Кокстера серии А): на группы Кокстера серий ВС, D и некоторые другие похожие серии групп и алгебр.

Ситуация существенно изменилась в начале 1990-х годов, когда А. М. Вершику удалось в соавторстве с А. Ю. Окуньковым реализовать свою давнюю программу рассмотрения групповых алгебр симметрических групп как локальных стационарных алгебр (см. напр. [3]). Теория оказалась достаточно проста и элегантна, поэтому немедленно последовало довольно серьёзное обобщение на сплетения симметрических групп с произвольными конечными группами , а также на сплетения симметрических групп с произвольными конечномерными полупростыми алгебрами .

1.2 YJM-элементы

Рассмотрим возрастающее семейство конечных групп . Эти группы имеют семейство образующих , так, что

|  |  |
| --- | --- |
| . | ((1) |

Пусть – такой элемент группы , что никакой элемент, сопряжённый с ним в группе не содержится ни в какой группе с меньшим номером (в действительности, мы будем рассматривать только очень простые элементы , например элементы, сопряжённые со стандартной образующей). Символом (при ) обозначим сумму всех элементов в групповой алгебре группы , сопряжённых в этой группе с элементом . Эти суммы будем называть элементами Юнга-Юциса-Мерфи или YJM-элементами.

Заметим, что элемент является разностью центрального элемента групповой алгебры группы и центрального элемента групповой алгебры предыдущей группы. Элементы образуют полную группу представителей классов сопряжённости в группе элементов этой группы, сопряжённых в группе с элементом : . Эти элементы, даже с разными номерами и соответствующие разным элементам, коммутируют между собой. Действительно:

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((2) |

В каждом произведении какой-нибудь номер не меньше другого, так что соответствующий элемент лежит в центре соответствующей групповой алгебры и коммутирует с другим сомножителем.

Следовательно, всевозможные элементы вида попарно коммутируют между собой и, тем самым, порождают последовательность коммутативных подалгебр групповых алгебр серий групп. Фактически, теория основана на том обстоятельстве, что эта подалгебра оказывается максимальной коммутативной подалгеброй групповой алгебры и позволяет построить базис пространства групповой алгебры, состоящий из общих собственных векторов всей подалгебры. Этот базис (правда, определённый не канонически в ситуации, когда кратности вхождений представлений группы как подпространств в неприводимые представления группы больше единицы, что не составляет непреодолимой трудности) называется (как и сама подалгебра) базисом (подалгеброй) Гельфанда-Цетлина.

В основном примере групповых алгебр симметрических групп – кокстеровские образующие симметрической группы. Тогда

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((3) |

классические элементы Юнга-Юциса-Мерфи.

В простейшем усложнённом примере – групп Кокстера серии ВС кроме образующих имеется ещё один образующий элемент . Конкретно группа реализована как группа перестановок 2*n*-элементного множества , при этом образующими являются двойные транспозиции , а образующая является транспозицией . Тем самым, группа состоит из всевозможных перестановок множества , сохраняющих разбиение множества на пары, то есть удовлетворяющих условиям: (первый случай) и (второй случай). В этой ситуации элемент не сопряжён с (попарно сопряжёнными) образующими , что приводит к рассмотрению двух семейств YJM-элементов:

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((4) |

и

|  |  |
| --- | --- |
|  | ((5) |

В остальных случаях применения рассматриваемого метода соответствующие формулы становятся, как правило, немного сложнее.

1.3 Симметрические многочлены от YJM-элементов

Рассмотрим последовательность коммутативных алгебр симметрических многочленов с целыми коэффициентами от формальных переменных . Подстановка в переменные элементов (3) индуцирует гомоморфизм алгебры в центр групповой алгебры -ой симметрической группы .

Ставится задача детального изучения этого гомоморфизма с выяснением обычных обстоятельств: какой именно симметрический многочлен является прообразом некоторого стандартного элемента центра (который равен сумме сопряжённых элементов симметрической группы, то есть – перестановок, имеющих заданную циклическую структуру), есть ли у этого гомоморфизма ядро и как оно устроено и т.д.

2 Актуальность темы выпускной квалификационной работы. Постановка задачи

Тема выпускной квалификационной работы актуальна, так кА рассмотрение даже простейшей усложнённой ситуации (группы серии ВС) на этом этапе приводит уже к рассмотрению многочленов от двух семейств переменных, симметрических отдельно по семействам – то есть к многократному усложнению формальной стороны и конкретных вычислений. Это делает «ручные» вычисления малоэффективными, а использование компьютера ещё более необходимым.

Для изучения симметрических многочленов от YJM-элементов необходимо разработать программное обеспечение, которое будет включать в себя следующие функции:

* проведение вычислений в групповой алгебре;
* вычисление образа конкретного симметрического многочлена под действием рассматриваемого гомоморфизма;
* проведение «обратной процедуры» построения по конкретному стандартному элементу центра одного из многочленов прообраза.

3 Разработка программного обеспечения

3.1 Обоснование выбора средств реализации

Для реализации приложения был выбран язык C#. Такой выбор языка обусловлен несколькими причинами:

* данный язык является объектно-ориентированным, что позволяет удобнее работать с данными и организовывать их в структуры;
* наличие специального языка запросов LINQ, который значительно упрощает работу с большими объемами данных;
* встроенные реализации списков, словарей объектов, поддерживающие поиск, выполнение сортировки, выборку данных и другие операции;
* кроссплатформенность языка позволяет разработку и использование программы независимо от используемого окружения – операционной системы, IDE, компилятора.

3.2 Реализация основных функций

Схемы алгоритмов основных реализованных функций приведены в приложении А, а исходные коды – в приложении Б.

Для выполнения поставленной задачи было разработано несколько классов: основные, реализующие функции по вычислениям в групповой алгебре, а также по работе с симметрическими многочленами и YJM-элементами, и вспомогательные, которые необходимы для работы основных.

Сначала рассмотрим вспомогательные классы. Для вычисления факториала числа используется статический класс Factorial. Он реализует метод Get (int), который принимает в качестве параметра число, факториал которого необходимо вычислить. Также в классе есть статическое поле factorials, которое используется для хранения уже вычисленных факториалов.

Рисунок 1 – Схема класса Factorial

Статический класс NumberSplits используется для генерации разбиений числа на слагаемые.

Рисунок 2 – Схема класса NumberSplits

Метод GenerateSplits(int) возвращает список всех разбиений числа в лексикографическом порядке. Статический метод CompareSplits() служит для поэлементного сравнения двух разложений дерева. Если два разложения не отличаются, то он возвращает true, иначе false.

Класс Combination необходим для генерации неупорядоченных выборок множества. Метод GetNextCombination() генерирует следующую выборку и возвращает true, если это удалось сделать, а иначе возвращает false. Для доступа к текущей выборке используется свойство CurrentCombination. Все уже сгенерированные разбиения хранятся в массиве Combinations.

Рисунок 3 – Схема класса Combination

Далее рассмотрим основные классы. Класс Cycle реализует цикл перестановки.

Рисунок 4 – Схема класса Cycle

Свойство Length пре

Метод InitCycle(int[]) выполняет функцию инициализации цикла и принимает в качестве параметра целочисленный массив. Метод Apply(int) реализует функцию применения цикла к числу, которое передается в качестве параметра – в цикле ищется число, равное переданному параметру. Если такое число находится, то возвращается следующее число из цикла, иначе метод возвращает значение параметра. Метод Contains(int) возвращает true, если цикл содержит число, иначе возвращает false.

3.3 Анализ полученных результатов

Заключение

Приложение А  
(справочное).  
Схемы алгоритмов основных функций

Приложение Б  
(справочное).  
Часть листинга программы

Приложение В  
(обязательное).  
Графическая часть

Приложение Г  
(обязательное).  
Авторская справка

Я, Стерлягов Андрей Александрович, автор выпускной квалификационной работы, сообщаю, что мне известно о персональной ответственности автора за разглашение сведений, подлежащих защите законами РФ о защите объектов интеллектуальной собственности. Одновременно сообщаю, что:

1) при подготовке к защите дипломной работы не использованы источники (документы, отчеты, диссертации, литература и т.п.), имеющие гриф секретности или «Для служебного пользования» ВятГУ или другой организации;

2) данная работа не связана с незавершенными исследованиями или уже с завершенными, но еще официально не разрешенными к опубликованию ВятГУ или другими организациями;

3) данная работа не содержит коммерческую информацию, способную нанести ущерб интеллектуальной собственности ВятГУ или другой организации;

4) данная работа не является результатом НИР или ОКР, выполняемой по договору с организацией;

5) в предлагаемом к опубликованию тексте нет данных по незащищенным объектам интеллектуальной собственности других авторов;

6) согласен на использование результатов своей работы ВятГУ для учебного процесса;

7) использование моей дипломной работы в научных исследованиях оформляется в соответствии с законодательством РФ о защите интеллектуальной собственности.

«\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 г. Подпись автора \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Сведения по авторской справке подтверждаю

«\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 г. Зав. кафедрой \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Приложение Д  
(обязательное).  
Библиографический список**

x

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | Young A. The Collected Papers of Alfred Young (1873–1940). Toronto, Ont., Buffalo, NY.: University of Toronto Press, 1977. 714 pp. |
| 2. | Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп: Пер. с англ. Москва: Мир, 1982. 216 с. |

x